

UNE APPROCHE ITERATIVE POUR LA CONCEPTION DE FILTRE NUMERIQUE R.I.F. A PHASE LINEAIRE DANS L'ESPACE DISCRET DES COEFFICIENTS

A.N. Belbachir, B. Boulerial et M. F. Belbachir

*Laboratoire Signaux et Systèmes, Institut d'Electronique,
Université Mohammed BOUDIAF 'U.S.T.O.' Oran, B.P. 1505 El Mnaouer 31000 Oran, Algérie
E-mail : belbachiran@yahoo.com.*

Résumé :

La méthode de recherche arborescente est optimale pour la conception des filtres numériques à coefficients de longueur limitée. Le problème est le temps de calcul prohibitif nécessaire pour la conception des filtres de longueur supérieure à 8 avec une représentation des coefficients sur 8 bits. A ce propos, une nouvelle technique 'méthode d'optimisation directe par moindre carré itérative' est présentée afin d'approcher les résultats obtenus par la méthode de recherche arborescente dans le sens de l'erreur quadratique moyenne avec un temps de calcul plus petit.

Mots clés :

Méthode de Recherche Arborescente (R.A.), Méthode Directe par Moindre Carré (D.M.C.), Méthode Directe par Moindre Carré Itératives (D.M.C.I.), Optimum Local (O.L.), Critère d'Erreur Quadratique Moyenne 'E.Q.M.'

1. Introduction

Lorsqu'un filtre numérique est implanté sur un processeur de signaux de longueur de mot 'lm' bits, chaque coefficient du filtre doit être représenté, par un nombre fini 'lm' de bits. L'approche habituellement utilisée consiste à quantifier les coefficients. Ceci engendre une détérioration importante des caractéristiques du filtre. On montre d'ailleurs qu'il existe d'autres coefficients de même longueur de mot finie qui donnent une meilleure approximation. Afin de retrouver ces coefficients, nous proposons donc d'inclure la limitation de la longueur de mot dans la procédure de la conception de filtre.

Pour concevoir des filtres numériques à coefficients de longueur finie, il est souvent désirable d'utiliser des algorithmes dont la qualité de sortie peut être ajustée suivant la disponibilité des ressources telles que, la précision et le temps de calcul. Dans ce cas le problème devient plus complexe, où une investigation générale de la solution optimale nécessite un temps de calcul prohibitif. Afin de remédier à ce problème, plusieurs méthodes d'optimisation ont été élaborées pour la conception des filtres numériques à coefficients discrets. La technique du gradient simulée 'Simulated Annealing Technique' (S.A.) [2]-[4] est efficace dans plusieurs cas, mais nécessite un grand nombre de fonctions d'évaluations impliquant un coût de calcul élevé. Ce nombre de fonctions d'évaluations dépend des températures de départ.

La programmation linéaire en nombre entier a été appliquée dans [1], [7]-[9] comme méthode d'optimisation discrète dans le sens minmax. Bien qu'elle permet d'obtenir des résultats optimaux, le temps de calcul nécessaire même avec les super

ordinateurs actuels, prohibe l'application de ces techniques pour des filtres d'ordre élevé.

Les techniques d'optimisation dans l'espace discret des coefficients, et en particulier la méthode de recherche arborescente, ont été élaborées afin de remédier à ce problème d'optimum discret. Ces méthodes basées sur des techniques d'énumérations implicites nécessitent aussi un coût de calcul très élevé [8], [10], [14], et [15]. Dans plusieurs méthodes de recherche locale basées sur la méthode de recherche arborescente, tels que 'la méthode de recherche en profondeur d'abord' ou 'la méthode de séparation et d'évaluation progressive' (SEP), les solutions retrouvées sont meilleures que celles obtenues à partir d'une quantification directe. L'objectif majeur de ces méthodes est la détermination de stratégies de branchement et de syntonisation. Cependant, la solution optimale n'est pas assurée [10], [14], [15].

La convergence de la méthode d'optimisation directe par moindre carré 'D.M.C.' proposée dans [15], [16] est très rapide, tandis que la solution finale dépend du choix du premier coefficient à déterminer ainsi que de l'ordre dans lequel sont ensuite considérés les autres coefficients.

Dans cet article, nous présentons une technique nommée 'D.M.C.I.' permettant d'exploiter l'optimalité de la méthode de recherche arborescente 'R.A.' et la vitesse de convergence de la méthode D.M.C.

Dans la section 2, nous définissons le problème et les caractéristiques du critère d'erreur quadratique moyenne. Dans la section 3, la méthode directe à moindre carré itérative 'DMCI' est décrite et les formulations mathématiques sont données. Une étude comparative des résultats que nous avons obtenus avec ceux obtenus dans [15] et [16] seront donnés dans la section 4.

2. Position du Problème

Soit à concevoir un filtre numérique RIF à phase linéaire de longueur N dont la réponse en fréquence s'écrit sous la forme :

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-j\omega k} \quad (1)$$

Il a été montré dans [5], que l'amplitude de la réponse en fréquence, pour les quatre cas de filtre à phase linéaire, peut s'écrire sous la forme :

$$P_n(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos \omega k \quad (2)$$

où n est le nombre de termes :

$$n = (N/2 \text{ ou } (N-1)/2 \text{ ou } (N+1)/2) \quad (3)$$

et a_k , relative à h_k , est la séquence décalée dépendant du cas considéré.

La réponse en amplitude $P_n(\omega)$ est comparée avec l'amplitude de la réponse en fréquence idéale $D(\omega)$, à l'aide du critère de l'erreur quadratique moyenne 'EQM'.

L'erreur d'approximation en amplitude suivant le critère de l'erreur quadratique moyenne est donnée par la forme suivante :

$$e_{\text{nam}} = \frac{1}{Nw} \sum_{i=0}^{Nw-1} \|D(\omega_i) - P_n(\omega_i)\| \quad (4)$$

où $i = 1, 2, \dots, Nw-1$
 Nw : nombre de points fréquentiels sélectionnés.

Si on considère un filtre passe bas idéal, l'amplitude de sa réponse en fréquence s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} D(\omega) &= 1 \quad \text{pour } \omega \in \text{bande passante.} \\ D(\omega) &= 0 \quad \text{pour } \omega \in \text{bande atténuée.} \end{aligned}$$

L'expression (4) devient alors :

$$e_{\text{nam}} = \frac{1}{Nw} \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} \|1 - P_n(\omega_i)\| + \sum_{i=k}^{Nw-1} \|P_n(\omega_i)\| \right\} \quad (5)$$

Les coefficients des filtres sont restreints à des valeurs discrètes définies par la longueur du mot machine disponible à ' lm ' bits.

Les méthodes que nous présentons dans ce qui suit sont valables pour les quatre cas décrits précédemment. Nous nous limitons au cas 2 (N pair et la symétrie positive). L'extension aux autres cas peut se faire facilement.

3. Méthode Directe à Moindre Carré Itérative 'D.M.C.I.'

Il a été montré dans [15], et [16] que la méthode 'D.M.C.' est plus rapide que la méthode 'R.A.'. La méthode détermine par un calcul séquentiel les valeurs des coefficients du filtre dans un ordre bien déterminé. Il a été aussi montré que les performances des filtres conçus par cette méthode 'D.M.C.' ne garantit pas l'optimalité des filtres conçus, la solution obtenue peut être un optimum local 'O.L.'.

Notre propos dans cet article est de présenter une nouvelle approche qui exploite la rapidité de convergence de la méthode 'D.M.C.' et permet de concevoir des filtres approchant les performances de ceux obtenus par la 'R.A.'.

Notre objectif est de palier aux deux inconvénients suivants :

- Le problème de la méthode 'D.M.C.' est le choix du coefficient de départ sur les performances du filtre obtenu ainsi que l'ordre dans lequel sont calculés les coefficients.
- Le problème lié à la méthode 'R.A.' est le temps de calcul prohibitif lorsque la longueur du filtre est supérieure à 8 avec une longueur de mot machine supérieure à 8 bits [15]. Ceci explique que dans la section 4., on ne trouvera qu'un seul filtre conçu par la méthode R.A. de longueur $N=8$ et $lm=7$ bits pour l'étude comparative.

A ce propos, nous avons élaboré la méthode Directe par Moindre Carré Itérative 'D.M.C.I.' qui permet d'améliorer la précision des résultats de la méthode 'D.M.C.' en effectuant en plusieurs itérations une recherche exhaustive autour de la solution obtenue au moyen de la méthode 'D.M.C.'.

3.1. Description de la Méthode :

Pour expliquer la méthode, nous choisissons l'exemple simple suivant :

Considérons un filtre défini par deux coefficients $\{h(0), h(1)\}$, dans un espace discret de longueur de mot ' lm ' bits, avec ' va ' valeurs admissibles.

La méthode 'D.M.C.I.' se déroule comme suit :

Nous utilisons la méthode 'D.M.C.' [16] pour calculer les coefficients $hdmc(0)$ et $hdmc(1)$. L'erreur 'E.Q.M.' du filtre calculé par rapport au filtre idéal est notée par $Edmc$.

Posons $Er = Edmc$.

Puis, nous fixons le coefficient $hdmc(0)$ et nous varions le coefficient $hdmc(1)$ dans un sous espace de valeurs

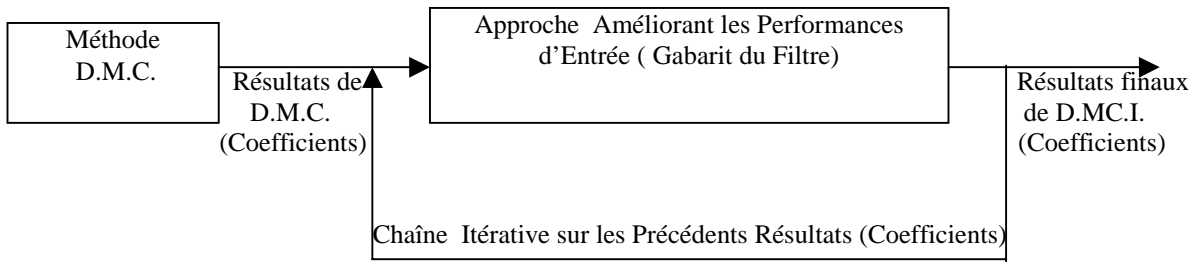


Fig.1. Schéma Représentatif de la Méthode D.M.C.I.

discrètes de rayon 'v' centré autour du coefficient $hdmc(1)$. ('v' est le nombre de valeurs admissibles inférieur à 'va').

Par ailleurs, à chaque solution discrète se situant dans l'espace de rayon 'v', nous calculons l'erreur 'E.Q.M.' notée par $Edmci$.

Si $Edmci < Er$, nous sauvegardons les coefficients correspondants soit $\{hdmc(0), hr(1)\}$ et Er devient égale à $Edmci$.

Posons $Er = Edmci$.

De la même façon précédente, nous fixons cette fois-ci le coefficient $hr(1)$ et nous varions le coefficient $hdmc(0)$ dans un sous espace de valeurs discrètes de rayon 'v' centré autour du coefficient $hdmc(0)$. ('v' est le nombre de valeurs admissibles inférieur à 'va'). A chaque solution discrète, nous calculons l'erreur 'E.Q.M.' $Edmci$.

Si $Edmci < Er$, nous sauvegardons les coefficients correspondants soit $\{hr(0), hr(1)\}$ et Er devient égale à $Edmci$.

Cette recherche est refaite sur plusieurs itérations 'It', jusqu'à ce que la variation de l'erreur ΔEr soit nulle.

Où

$$\Delta Er = Er(\text{itération actuelle}) - Er(\text{itération précédente}). \quad (6)$$

Dans ce cas nous obtenons les coefficients finaux $hf(0)$ et $hf(1)$. Ces coefficients sont nommés $\{hdmci(0), hdmci(1)\}$ obtenus par la méthode 'D.M.C.I.' après 'It' itérations.

3.2. Description de l'algorithme :

L'algorithme de cette méthode 'D.M.C.I.' se subdivise en deux parties (Fig.1) :

- La première partie représente l'algorithme de la méthode 'D.M.C.' définie dans [15], [16], où les valeurs des coefficients sont obtenues par un calcul séquentiel.
- La deuxième partie représente une méthode itérative qui est basée sur l'amélioration des résultats trouvés dans la première partie (méthode DMC) après 'It' itérations, en faisant le balayage des valeurs discrètes dans un espace de rayon 'v' centré autour du coefficient de départ (coefficient calculé par 'D.M.C.').

'v' étant fixé suivant le nombre de valeurs

admissibles 'va' et la longueur du mot du processeur 'lm'.

4. Résultats des Expériences

L'algorithme a été testé en utilisant des cas rapportés dans la littérature. Dans tous les exemples, le calculateur utilisé est Microsoft Intel Pentium II avec une fréquence CPU de travail de 300 MHz. Les résultats obtenus sont présentés et comparés aux algorithmes dans [15] et [16]. Le numéro de référence indique où le filtre a été pris. Un filtre de longueur 8 et une quantification à 7 bits, excluant le bit de signe, est noté par '8/7'.

L'algorithme a été testé dans les trois représentations binaires en virgule fixe, en virgule flottante et S.D.P.D. (Somme de Deux de Puissance de Deux) [10] respectivement dans les tableaux 1, 2, 3.

Nous notons par :

N : longueur du filtre.

lm : longueur du mot du processeur en bits.

PMCQ : 'EQM' relative au filtre de Parks Mc. Clellan et où les coefficients sont quantifiés dans une longueur de mot de 'lm' bits.

RA : 'EQM' relative au filtre calculé au moyen de la méthode 'R.A.'.

DMC : 'EQM' relative au filtre calculé au moyen de la méthode 'D.M.C.'.

DMCI : 'EQM' relative au filtre calculé au moyen de la méthode 'DMCI'.

tp : temps de calcul correspondant à chaque méthode.

N/lm	PMCQ/tp	RA/tp	DMC/tp	DMCI/tp
8/7	.035/.05s	.033/46h	.059/.05s	.035/1.9s
8/19	.035/25s	-----	.048/6.2s	.031/60s
24/15	.0010/13s	-----	.0099/4s	.0008/85s
16/15	.070/9s	-----	.043/2s	.039/45s
50/15	.002/20s	-----	.007/8s	.001/117s
56/13	.004/19s	-----	.007/7.2s	.003/123s

Tableau 1. Comparaison des résultats obtenus par les méthodes 'P.M.C.Q.', 'R.A.' [15], 'D.M.C.' [16] et 'D.M.C.I.' dans la représentation en virgule fixe.

N/lm	PMCQ/tp	RA/tp	DMC/tp	DMCI/tp
8/7	.035/.05s	.032/49h	.059/.05s	.032/1.8s
8/19	.035/25s	-----	.031/5.6s	.031/51s
24/15	.0010/10s	-----	.0099/4s	.0009/80s
16/15	.070/7.5s	-----	.043/1.8s	.039/60s
50/15	.002/17s	-----	.007/9s	.001/130s
56/13	.004/18s	-----	.007/5s	.003/139s

Tableau 2. Comparaison des résultats obtenus par les méthodes 'P.M.C.Q.', 'R.A.' [15], 'D.M.C.' [16] et 'D.M.C.I.' dans la représentation en virgule flottante.

N/lm	PMCQ/tp	RA/tp	DMC/tp	DMCI/tp
8/7	.127/.05s	.127/78s	.148/.05s	.127/.88s
8/19	.070/17s	-----	.064/3.9s	.051/41s
24/15	.065/2.2s	-----	.053/1.3s	.016/65s
16/15	.078/1.1s	-----	.063/9s	.040/8s
50/15	.023/4s	-----	.020/2.5s	.013/96s
56/13	.025/8s	-----	.028/4.2s	.017/95s

Tableau 3. Comparaison des résultats obtenus par les méthodes 'P.M.C.Q.', 'R.A.' [15], 'D.M.C.' [16] et 'D.M.C.I.' dans la représentation S.D.P.D.

Dans tous les exemples, les filtres considérés sont des filtres R.I.F. à phase linéaire appartenants au cas2 (symétrie positive et longueur du filtre paire) [6].

Nous présentons dans ces trois tableaux les résultats de six filtres. Les trois premiers exemples sont des filtres de bande passante [0 0.159] et de bande atténuée [0.295 0.5]. Les trois autres exemples sont de bandes passantes [0 0.318], [0 0.05], [0 0.31] et de bandes atténuées respectivement [0.371 0.5], [0.104 0.5], [0.35 0.5]. Tous les filtres sont conçus avec une fonction poids égale dans la bande passante et dans la bande atténuée. Autour de chaque coefficient calculé par la méthode DMC, nous avons défini un sous espace discret de recherche de rayon 'v' expérimentalement fixé en référence à la longueur du mot machine 'lm'. Le nombre d'itérations 'It' dépend de l'ordre du filtre.

Dans la colonne de la méthode R.A. nous n'avons représenté que le premier filtre parce que cette méthode ne peut pas être utilisée pour la conception des filtres d'ordre supérieure à 7 et de longueur de mot supérieure à 7 bits excluant le bit de signe, à cause du temps de calcul prohibitif.

Le nombre d'itérations 'It' varie de 5 à 40 suivant l'ordre du filtre, tandis que le rayon 'v' du sous espace discret varie entre 5 à 20 suivant la longueur du mot 'lm'.

Dans tous les exemples les résultats obtenus sont meilleurs que ceux obtenus dans la référence

indiquée. Dans les tableaux 1, 2 et 3 les résultats sont donnés en fonction de l'erreur et du temps de calcul. Il est remarqué que l'algorithme de la méthode D.M.C.I. peut être utilisé pour le calcul de filtres de grande longueur avec un temps de calcul accessible (N=56 pour exemple 6) et peuvent approximer des filtres dans l'espace discret des coefficients à longueur de mot grande (lm=20 bits pour l'exemple 2).

5. Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé l'algorithme nommé 'D.M.C.I.' qui utilise une nouvelle approche qui consiste à exploiter les performances de 'R.A.' et la rapidité de 'D.M.C.'. A travers quelques exemples nous avons montré que les objectifs recherchés ont été atteints. A titre d'exemple, pour la conception d'un filtre de longueur N=8, le filtre obtenu par 'D.M.C.I.' possède les performances du filtre 'R.A.' (E.Q.M.=.032 ou .127 selon la représentation utilisée) et un temps de calcul très acceptable. L'étude comparative basée sur les critères E.Q.M./tp que nous avons donné dans cet article montre que les résultats obtenus peuvent être considérés comme meilleurs que ceux de [15], [16]. Dans les exemples, il est constaté que les représentations en virgule fixe et en virgule flottante sont mieux adaptées à D.M.C.I. La méthode D.M.C.I. est plus lente que la méthode D.M.C. avec un temps de synthèse très acceptable mais nettement plus rapide que R.A.

Notre recherche actuelle consiste à améliorer la complexité de cet algorithme et cela en faisant un choix approprié du nombre nécessaire d'itérations.

Références

- [1] D.M. Kodek, "Design of Optimal Finite Word length FIR Digital Filters Using Integer Programming Techniques," IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. 28, pp. 304-308, June 1980.
- [2] Ioannis PITAS, "Optimisation and Adaptation of Discrete-Valued Digital Filter Parameters by Simulated Annealing," IEEE Trans. Signal Processing, vol. 42, NO. 4, pp. 860-866, April 1994.
- [3] N. Benvenuto, M. Marchesi, "Digital Filters Design by Simulated Annealing," IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 36, pp. 459-460, March 1989.
- [4] T. Ciloglu and Z. Unver, "A New Approach to Discrete Coefficient FIR Digital Filter Design by Simulated Annealing," IEEE of Int. Conf. on ASSP. Minnisota 1993.
- [5] Lawrence R. Rabiner, Bernard Gold, "Theory and Application of Digital Signal Processing," PRENTICE-HALL, INC. 1975.
- [6] J. H. Mc. Clellan, T. W. Parks, and L. R. Rabiner, "A Computer Program for Designing Optimum FIR Linear Phase Digital Filters," IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol. AU-21, pp. 506-526, Dec. 1973.
- [7] M. Minoux, "Programmation mathématique, théorie et algorithmes," tomes 1 et 2, Dunod, 1983.
- [8] B. Jaumard, M. Minoux, and P. Siohan "Finite Precision Design of FIR Digital Filters Using a Convexity Property," IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. 36, pp. 407-411, March 1988.

- [9] Yong C. Lim, Sydney R. Parker, and A. G. Constantinides, "Finite Word Length FIR Filter Design Using Integer Programming Over a Discrete Coefficient Space," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-30, pp. 661-664, Aug. 1982.
- [10] Y. C. Lim, S. R. Parker, "FIR Filter Design Over a Discrete Powers-of-Two Coefficient Space," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-31, pp. 583-591, June 1983.
- [11] Y. C. Lim, S. R. Parker, "Discrete Coefficient FIR Digital Filter Design Based Upon an LMS Criteria," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-30, pp. 723-739, Oct. 1983.
- [12] Y. C. Lim, "Design of Discrete-Coefficient-Value Linear Phase FIR Filters with Optimum Normalised Peak Ripple Magnitude," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 37, NO. 12 pp. 1480-1486, December 1990.
- [13] Li Lee & Alan V. Oppenheim, "Properties of Approximate Parks Mc. Clellan Filters," *Proc. ICASSP München*, April 1997.
- [14] B. Boulerial, M. F. Bel Bachir, "Filtres RIF: Synthèse Directe dans l'Espace Discret des coefficients", 1st National Workshop on Signal & Image Processing, NWSIP'98, 1 Décembre 1998, Sidi Bel-Abbes, Algérie.
- [15] B. Boulerial, "Synthèse de Filtres RIF à Phase Linéaire dans l'Espace Discret des Coefficients", Thèse de Magister, Institut des Télécommunications d'Oran, Algérie, novembre 1998.
- [16] B. Boulerial, M. F. Bel Bachir, "Une Méthode Directe au Sens des Moindres Carrés D.M.C pour la Conception de Filtres R.I.F à Phase Linéaire dans l'Espace Discret des coefficients", International Meeting on Components and Electronic Systems IMCES'99, 17-18 mai 1999, Sidi Bel-Abbes, Algérie.